UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
MÓDELO DE LA PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

Curso **2017-2018**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN DE LA PRUEBA

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de los que consta la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

TIEMPO: Una hora y treinta minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2y+z=2 \\ 2x+my=2 \end{cases}$$

Se pide:
a) Discutir el sistema en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.
b) Resuelver el sistema en el caso $m = 0$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x \leq 0 \\ x^2-3x+1 & x > 0 \end{cases}$$

Se pide:
a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x = 0$.
b) Calcular los máximos y mínimos absolutos de la función en el intervalo $[-2, 2]$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Se pide:
a) Calcular el área de la región del plano comprendida entre las curvas $y = x^2 - 6x$ e $y = 2x$.
b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 6x$ en $x = 0$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
En un polígono industrial se almacenan 30000 latas de refresco procedentes de las fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en 2016 caducan 1800 latas de la fábrica A, 2400 procedentes de la B y 3000 que proceden de la fábrica C.
a) Calcular la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2016.
b) Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y caduca en 2016, hallar la probabilidad de que proceda de la fábrica A?

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ m & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide
a) Determinar para qué valores de $m \in \mathbb{R}$ se verifica la ecuación $A^2 - 3A = I$.
b) Para $m = 1$ hallar la matriz inversa de A.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Se considera la región del plano S definida por las restricciones:

$$\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 4 \\ x + 2y \geq 2 \\ x,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:
a) Representar gráficamente la región factible y calcula los vértices de la misma.
b) Calcular el valor máximo y mínimo (y el punto donde se alcanzan) de la función. $z = 4x + y$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 - 8}$$

Se pide:
a) Determinar sus asíntotas.
b) Determinar su dominio, sus puntos de corte con los ejes y estudiar su continuidad.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos)
Se supone que el peso del equipaje de mano de los viajeros de los trenes que conectan dos ciudades de un cierto pais se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 2$ kgr.
a) Determinar el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media muestral sea menor que 1kgr con un nivel de confianza del$95\,\%$.
b) Si $\mu = 21$kgr calcular la probabilidad de que la media muestral obtenida de 16 equipajes elegidos aleatoriamente, sea mayor que 20kgr.

SOLUCIONES OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & m & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = -2m - 2.$

a.1) Si $m \neq -1$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.

a.2) Si $m = -1$, reduciendo la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

concluimos que el sistema es INCOMPATIBLE.

b) $\left.\begin{array}{rl} x - y + z & = 1 \\ x - 2y + z & = 2 \\ 2x & = 2 \end{array}\right\}$. De la tercera ecuación obtenemos que $x = 1$, y, sustituyendo el valor de x en las otras dos ecuaciones, obtenemos $y = z = -1$. Otra manera de resolverlo es aplicar el método de Cramer.

Ejercicio 2.

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 - x = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 - 3x + 1 = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ y por tanto f es continua en $x = 0$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 2x - 3 & x > 0 \end{cases}$$

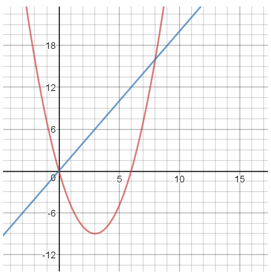
Como $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1 \neq -3 = \lim_{x \to 0^+} f'(x) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Evaluamos la función en los extremos del intervalo, los puntos donde no hay derivada y los puntos donde esta se anula:

$$f(-2) = 3 \quad f(0) = 1 \quad f(3/2) = -5/4 \quad f(2) = -1$$

Concluimos que el máximo se alcanza en $x = -2$ y toma el valor 3 y el mínimo en $(3/2, -5/4)$.

Ejercicio 3.



a) Puntos de corte de las curvas: $x^2 - 6x = 2x \Longrightarrow x = 0,\ x = 8$. Por lo tanto el área pedida es:

$$A = \left| \int_0^8 x^2 - 8x \, dx \right| = \left| x^3/3 - 4x^2 \right|_0^8 = 256/3 u^2$$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto $x = 0$ es

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Longrightarrow y = -6x$$

Ejercicio 4.

a) Sea $F =$" la lata caducada en 2016"

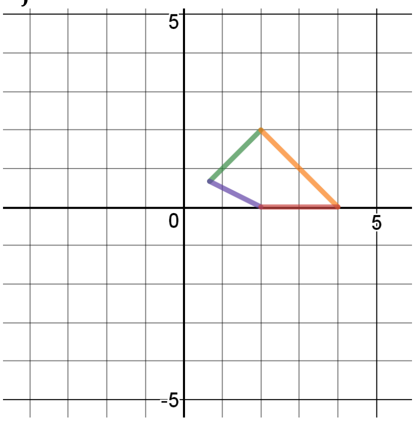
$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) = P(A)P(F|A) + P(B)P(F|B) + P(C)P(F|C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{50} + \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{50} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{25}$$

b) $P(A|F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(A)P(F|A)}{P(F)} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

SOLUCIONES OPCIÓN B

Ejercicio 1.
a)
$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} m^2+3m & 3m+6 \\ m^2+2m & 3m+4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2-3A = \begin{pmatrix} m^2 & 3m-3 \\ m^2-m & 3m-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow m=1$$
b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.



Vértices de la región factible $(2,0)$, $(4,0)$, $(2,2)$ y $(2/3, 2/3)$

b)
$$\begin{matrix} f(2,0)=8 & f(2,2)=10 \\ f(4,0)=16 & f(2/3,2/3)=10/3 \end{matrix} \Longrightarrow$$ el máximo es16 y se alcanza en$(4,0)$
y el mínimo es $10/3$ y se alcanza en$(2/3, 2/3)$

Ejercicio 3. a) Asíntotas horizontales:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-1}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{8}{x^3}} = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ tiene una asíntota horizontal en $y=1$.
Asíntotas verticales:
$\lim\limits_{x\to 2^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} = \infty$. En $x=2$ tiene una asíntota vertical.
b)El dominio de f serán todos los números reales menos aquellos que anulen el denominador, Dom $f(x) = \{x\in\mathbb{R} | x^3-8\neq 0\} = \mathbb{R}-\{2\}$. Puntos de corte:
$$x=0 \Longrightarrow f(0) = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}, \qquad \frac{x^3-1}{x^3-8} = 0 \Longrightarrow x=1$$
Por tanto los punto de corte son $(0, 1/8)$ y $(1,0)$.
La función es continua en todo su dominio, $\mathbb{R}-\{2\}$, por ser un cociente de funciones continuas.

Ejercicio 4.
a) $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow 3'92 < \sqrt{n} \Rightarrow n > 15,68.$
Por lo tanto se tiene que tomar una muestra de tamaño como mínimo 16.
b) $N(21,2), n=16 \longrightarrow \overline{X} \approx N(21, \frac{2}{4})$
$P(\overline{X} > 20) = P(\frac{\overline{X}-21}{1/2} > -2) = P(Z > -2) = P(Z<2) = 0'9772$