UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS
Curso **2017-2018**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Modelo

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de transmisión de datos, representación gráfica o cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: Cada ejercicio se valora sobre **2.5 puntos** y en el enunciado se especifica la valoración de cada apartado. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 .
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar, en caso de que exista, la matriz inversa de A, cuando $m = 0$.
b) (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, según los valores del parámetro m.
c) (0.5 puntos) Para $m = 0$, resolver, si es posible, el sistema $AX = B$.

Ejercicio 2 .
Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$, definidas para $x \geq 0$, se pide:

a) (1 punto) Comprobar que ambas funciones son crecientes en $(0, \infty)$ y hallar los puntos de corte de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.
b) (1 punto) Calcular el área de la región comprendida entre las dos curvas.
c) (0.5 puntos) Calcular la derivada de $h(x) = (f(x) + g(x))^2$.

Ejercicio 3 .

Dados el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} -2x + z = 1\,, \\ 3x - y = 3\,, \end{array} \right.$ se pide:

a) (1.5 puntos) Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta s y al punto P.
b) (1 punto) Hallar el seno del ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y la recta s.

Ejercicio 4 .

Para un experimento aleatorio, se consideran los sucesos M y N, tales que:

$$p(\overline{M}) = \frac{3}{5}, \quad p(N) = \frac{2}{5}, \quad p(M|N) = \frac{2}{5}.$$

Se pide:

a) (1.5 puntos) Comprobar que los sucesos M y N son independientes y compatibles.
b) (1 punto) Calcular $p(\overline{M} \cap \overline{N})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 .

Dados la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = z$ y el plano $\pi \equiv x + y - 2z - 4 = 0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el área del triángulo formado por los puntos $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ y el punto C intersección de π con r.

b) (1.5 puntos) Obtener un plano, perpendicular a π que contenga a r.

Ejercicio 2 .

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1\,, \\ e^{1-x} & \text{si } x \geq 1\,, \end{cases}$ se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar su continuidad y derivabilidad. Calcular la función derivada f' donde sea posible.

b) (0.5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) (0.5 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Ejercicio 3 .

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz $M - 2N$.

b) (1.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, la inversa de la matriz $A = M + N^2$

Ejercicio 4 .

En una empresa trabajan 180 hombres y 120 mujeres. Entre los hombres hay un 20% en puestos denominados “de riesgo” y entre las mujeres hay un 15% en este tipo de puestos. Si elegimos al azar un empleado de la empresa. Se pide:

a) (1.5 puntos) Probabilidad de que no ocupe puesto de riesgo.

b) (1 punto) Sabiendo que ocupa puesto de riesgo, calcular la probabilidad de que sea una mujer.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

En todos los ejercicios, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido o razonamiento que conduzca a la solución del problema será valorado con la puntuación correspondiente.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.
b) Por la obtención del valor crítico $[m = 1]$: 0.5 puntos (repartidos en planteamiento: 0.25, resolución: 0.25). Por la discusión de cada uno de los dos casos ($[m = 1]$, $[m \neq 1]$): 0.25 puntos. Si los valores obtenidos no son los correctos pero hay coherencia en la discusión: 0.5 puntos en total.
c) Procedimiento: 0.25 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

Ejercicio 2.

a) Saber que la derivada positiva en un intervalo implica que la función es creciente: 0.25 puntos. Calcular las derivadas y comprobar que son positivas en $(0, \infty)$: 0.5 puntos. Hallar los puntos de corte: 0.25 puntos.
b) Saber qué integral se debe calcular: 0.5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.25 puntos. Regla de Barrow: 0.25 puntos.
c) Procedimiento: 0.25 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Procedimiento: 0.75 puntos. Cálculos: 0.75 puntos.
b) Procedimiento: 0.5 puntos. Resultado: 0.5 puntos.

Ejercicio 4.

a) Calcular $p(M \cap N)$: 0.5 puntos. Saber el significado de sucesos independientes: 0.5 puntos. Saber el significado de sucesos compatibles: 0.5 puntos.
b) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

a) Hallar el punto C: 0.5 puntos (repartidos en procedimiento: 0.25, cálculos: 0.25). Calcular el área del triángulo: 0.5 puntos (que se asignarán si el área está correctamente calculada, aunque el punto C no sea correcto).
b) Procedimiento: 0.75 puntos. Cálculos: 0.75 puntos.

Ejercicio 2.

a) Justificar que la función es continua en $x \neq 0$: 0.25 puntos. Estudio de la continuidad en $x = 0$: 0.5 puntos (repartidos en procedimiento: 0.25, cálculos: 0.25). Cálculo de la derivada en $x \neq 1$: 0.25 puntos. Probar que f no es derivable en $x = 1$: 0.5 puntos.
b) Saber qué límite hay que hacer: 0.25 puntos. Calcularlo: 0.25 puntos.
c) Saber qué integral hay que hacer: 0.25 puntos. Calcularla: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Calcular la matriz $M - 2N$: 0.25 puntos. Calcular el rango, por cualquier procedimiento válido: 0.75 puntos.
b) Calcular la matriz $M + N^2$: 0.5 puntos. Calcular la inversa: 1 punto (repartido en procedimiento: 0.5; cálculos 0.5).

Ejercicio 4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.75 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Modelo

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES
OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Para $m = 0$ es $A = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\det(A_0) = 3 \neq 0$, por lo que admite inversa. $\boxed{A_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}}$.

b) Reducción por filas de la matriz ampliada del sistema:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & m & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & m-2 & -3 & -13 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & m-2 & -3 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3-3m & 1-7m \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Si } m \neq 1 \text{ el sistema es compatible determinado. Si } m = 1 \text{ el sistema es incompatible.}}$

c) Usando la reducción por filas anterior, en el caso particular $m = 0$, se obtiene $\boxed{z = 1/3,\ y = 6,\ x = -5/3}$.

Nota: También se puede usar la matriz inversa obtenida en el apartado (a) y hacer $\boxed{X = A_0^{-1}B}$.

Ejercicio 2

a) Como $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} > 0,\ \forall x > 0$ y $g'(x) = 2x > 0,\ \forall x > 0$, ambas funciones son crecientes en $(0, \infty)$. Puntos de corte: $\sqrt{x} = x^2 \Longrightarrow x = 0$ o $x = 1 \Rightarrow \boxed{(0,0),(1,1)}$.

b) Para $0 < x < 1$ es $\sqrt{x} > x^2$, por lo tanto el área pedida vendrá dada por

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{1/3}.$$

c) $h'(x) = 2(f(x) + g(x))(f'(x) + g'(x)) = 2(\sqrt{x} + x^2)(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x) = 1 + 5x^{3/2} + 4x^3$.

Ejercicio 3

a) Un punto de la la recta s es $Q(0,-3,1)$ y el vector director es $\overrightarrow{v} = (1,3,2)$. La ecuación del plano pedido τ, se puede obtener con el punto P y los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$. Unas ecuaciones paramétricas del plano son: $\tau \equiv (x,y,z) = (1,-1,0) + \lambda(1,3,2) + \mu(-1,-2,1)$. $\boxed{\text{Ecuación implícita: } \tau \equiv 7x - 3y + z = 10.}$

b) Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (2,1,-1)$. Si θ es el ángulo que forman la recta y el plano, se tiene que $\boxed{\sin(\theta) = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{v}|} = \frac{3}{2\sqrt{21}}}$.

Ejercicio 4

a) $p(M \cap N) = p(N)p(M|N) = \dfrac{4}{25} = p(M)p(N)$. Como la probabilidad de la intersección coincide con el producto de las probabilidades, se puede asegurar que M y N son independientes y como $p(M \cap N) \neq 0$, los dos sucesos son compatibles.

b) $p(\overline{M} \cap \overline{N}) = p(\overline{M \cup N}) = 1 - p(M \cup N) = 1 - (p(M) + p(N) - p(M \cap N)) = \boxed{\dfrac{9}{25}}$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) Punto C, intersección del plano π y la recta r:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $C(3,2,1/2)$ y el área del triángulo ABC es $\boxed{\dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \dfrac{|(3/2,1,-7)|}{2} = \dfrac{\sqrt{209}}{4}}$.

b) Un plano perpendicular al plano π y que contenga a la recta r se puede definir con el punto de la recta $P(2,1,0)$, el vector director de la recta $\overrightarrow{v} = (2,2,1)$ y el vector normal al plano, $\overrightarrow{n} = (1,1,-2)$. La ecuación implícita es $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Es decir $\boxed{x - y = 1}$.

Ejercicio 2

a) La función es continua y derivable $\forall x \neq 1$, porque está definida a trozos mediante funciones que lo son. Además f es continua en $x = 1$ ya que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{1-x} = 1 = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x$$

Por otra parte, f es derivable en $x \neq 1$ y $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ -e^{1-x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

No es derivable en $x = 1$, ya que $f'(1^-) = 1 \neq f'(1^+) = 0$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$.

c) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 3

a) $\det(M - 2N) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$, por lo tanto $\boxed{\text{rango}(M - 2N) = 3}$.

b) $A = M + N^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $\det(A) = 16$, por lo que admite inversa. $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4

Se definen los sucesos aleatorios: A="Ser mujer", B="Ser hombre" y R = "Ocupar puesto de riesgo". De acuerdo con el enunciado se tiene:

$$p(A) = \frac{120}{300} = 0.4, \qquad p(B) = \frac{180}{300} = 0.6, \qquad p(R|A) = 0.15, \qquad p(R|B) = 0.2.$$

a) $p(\overline{R}) = p(A)p(\overline{R}|A) + P(B)p(\overline{R}|B) = 0.4 \cdot 0.85 + 0.6 \cdot 0.8 = 0.82$.

b) $p(A|R) = \dfrac{p(A)p(R|A)}{p(R)} = \dfrac{0.4 \cdot 0.15}{0.18} = \dfrac{1}{3}$